ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

დავალება № 17 . ეკონომიკური ფუნქციების ოპტიმიზაცია. მარგინალური ანალიზის კრიტერიუმები მაქსიმალური მოგებისა და მინიმალური დანახარჯისთვის. მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 17-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16-ა,დ	16-ბ,გ	17	18	19				

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

2. ფიქსირებული დანახარჯი არის 100, ხოლო ცვლადი დანახარჯია $4Q$. ჩაწერეთ TC, AC და MC ფუნქციები. იპოვეთ Q-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც AC არის მინიმალური და დარწმუნდით, რომ ამ წერტილში $AC = MC$.

ამოხსნა. პირობის თანახმად ფიქსირებული დანახარჯია 100, ხოლო ცვლადი დანახარჯი – $4Q$, ამიტომ სრული დანახარჯი TC იქნება: $TC = 100 + 4Q^2$, ხოლო საშუალო დანახარჯი

$$AC = \frac{100 + 4Q^2}{Q} = \frac{100}{Q} + 4Q,$$

მარგინალური დანახარჯი $MC = \left(100 + 4Q^2\right)' = 8Q$. უნდა ვიპოვოთ Q-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც საშუალო დანახარჯი მინიმალურია; ამისათვის ვიპოვოთ $\left(AC\right)'$ და ამოვხსნათ განტოლება $\left(AC\right)' = 0$:

$$\left(AC\right)' = 4 - \frac{100}{Q^2}, \quad 4 - \frac{100}{Q^2} = 0, \quad 4Q^2 = 100,$$

$$Q^2 = 25, \quad Q = 5;$$

$$\left(AC\right)'' = \frac{200}{Q^3}; \quad \left(AC\right)''(5) = \frac{200}{125} > 0.$$

ამიტომ, როცა $Q=5$, მაშინ საშუალო დანახარჯი მინიმალურია.

შევამოწმოთ, რომ როცა $Q=5$, მაშინ $MC=AC$.

მართლაც, $AC(5)=20+4\cdot5=40$, $MC(5)=8\cdot5=40$.

პასუხი. $TC=100+4Q^2$, $AC=4Q+\dfrac{100}{Q}$, $MC=8Q$. AC მინიმალურია, როცა $Q=5$, $AC(5)=MC(5)=40$.

3. ფირმის წარმოების ფუნქციაა $P_L=Q$, სადაც $Q=30L^2-0.5L^3$, L კი მუშახელის რაოდენობაა. იპოვეთ L-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც საშუალო წარმოება AP_L არის მაქსიმალური და დარწმუნდით, რომ ამ წერტილში $MP_L=AP_L$.

ამოხსნა. პირობის თანახმად შრომის ნაყოფიერების ფუნქცია $P_L=Q=30L^2-0.5L^3$. უნდა ვიპოვოთ L-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც საშუალო შრომის ნაყოფიერება AP_L არის მაქსიმალური.

საშუალო შრომის ნაყოფიერება $AP_L=\dfrac{30L^2-0.5L^3}{L}=30L-0.5L^2$.

ვიპოვოთ AP_L ფუნქციის სტაციონარული წერტილები, ამისათვის ამოვხსნათ განტოლება

$$(AP_L)'=0,\ (AP_L)'=\left(30L-0.5L^2\right)'=30-L,$$

$$30-L=0,\ L=30 \text{ სტაციონარული წერტილია.}$$

$(AP_L)''=-1<0$, ამიტომ, როცა $L=30$ საშუალო შრომის ნაყოფიერება მაქსიმალურია.

შევამოწმოთ, რომ $MP_L=AP_L$, როცა $L=30$.

მართლაც,

$$MP_L=(P_L)'=60L-1.5L^2=L(60-1.5L);\ MP_L(30)=30\cdot15=450.$$

$$AP_L(30)=\left(30L-0.5L^2\right)\Big|_{L=30}=30\cdot30-0.5\cdot900=450.$$

პასუხი. როცა $L=30$, მაშინ საშუალო შრომის ნაყოფიერება არის მაქსიმალური.

5. ქარხანაში დილის ცვლის(8:00-12:00 სთ) ეფექტურობის შესწავლა მიუთითებს იმაზე, რომ საშუალოსტატისტიკური მუშა, რომელიც იწყებს მუშაობას დილის 8 საათზე, t საათში აწარმოებს $Q(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2+15t$ რაოდენობის საქონელს.

   ა) რომელ საათზე იქნება მუშის მწარმოებლურობა ყველაზე ეფექტური?

   ბ) რომელ საათზე იქნება მუშის მწარმოებლურობა მინიმალური?

ამოხსნა. პირობის თანახმად, 8 საათზე სამუშაოს დაწყებიდან t საათში მუშა აწარმოებს

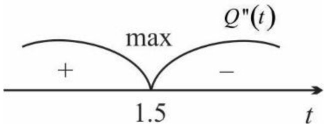
$$Q(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2+15t$$

რაოდენობის პროდუქციას.

ა) უნდა ვიპოვოთ რომელ საათზე იქნება მწარმოებლურობა ანუ შრომის ნაყოფიერება ყველაზე ეფექტური. შრომის ნაყოფიერება $Q'(t)=-3t^2+9t+15$.

ვიპოვოთ t-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $Q'(t)$ ფუნქცია ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. გამოვთვალოთ $Q''(t) = -6t + 9$, $Q''(t) = 0$, როცა $t = 1.5$.

ინტერვალთა მეთოდით შეგვიძლია დავადგინოთ $Q''(t)$ ფუნქციის ნიშანი, შემდეგი სახით:



მაშასადამე, $t = 1.5$ არის $Q'(t)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.

$Q'(t)$ არის კლებადი, როცა $1.5 \le t \le 4$ (სამუშაო მთავრდება 12 საათისთვის), ამიტომ, როცა $t = 4$ შრომის ნაყოფიერება იქნება მინიმალური.

პასუხი.

ა) მწარმოებლურობა ყველაზე ეფექტური იქნება 9:30 საათისთვის, ანუ მუშაობის დაწყებიდან $t = 1.5$ სთ-ის შემდეგ.
ბ) მწარმოებლურობა მინიმალური იქნება 12 სთ-თვის, ანუ მუშაობის დაწყებიდან 4 სთ-ის შემდეგ.

7. ფირმის წარმოების ფუნქციაა $Q = 300L^2 - L^4$, სადაც L აღნიშნავს მუშახელის რაოდენობას. დაადგინეთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს საშუალო პროდუქტიულობის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. შეამოწმეთ ამ მნიშვნელობისთვის $AP_L = MP_L$ ტოლობა.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, წარმოების ფუნქცია $P_L = Q = 300L^2 - L^4$, სადაც L აღნიშნავს მუშახელის რაოდენობას.
უნდა დავადგინოთ, რა რაოდენობის მუშახელი უზრუნველყოფს AP_L – საშუალო პროდუქტიულობის მაქსიმალურ მნიშვნელობას,

$$AP_L = \frac{Q}{L} = 300L - L^3,\ (AP_L)' = 300 - 3L^2,\ (AP_L)' = 0 \Rightarrow L^2 = 100,\ L = 10;$$

$(AP_L)'' = -6L\big|_{L=10} = -60 < 0$. ამიტომ, როცა $L = 10$, მაშინ AP_L ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.
შევამოწმოთ, რომ $AP_L = MP_L$, როცა $L = 10$. მართლაც,

$$AP_L(10) = 3000 - 1000 = 2000,$$

$$MP_L = \left(600L - 4L^3\right)\Big|_{L=10} = 6000 - 4000 = 2000.$$

პასუხი. საშუალო პროდუქტიულობა მაქსიმალურია, როცა მუშახელის რაოდენობა $L = 10$.

8. მოცემულია პროდუქტის მოთხოვნის განტოლება $p + 2Q = 20$. ამასთან სრული დანახარჯის ფუნქციაა $TC = Q^3 - 8Q^2 + 20Q + 2$.

ა) პროდუქციის რა რაოდენობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური?;

ბ) იპოვეთ მოგების მაქსიმალური მნიშვნელობა და Q-ს ის მნიშვნელობა, რომელშიც იგი მიიღწევა. დარწმუნდით, რომ Q-ს ამ მნიშვნელობისთვის $MR = MC$.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, მოთხოვნის განტოლებაა $p + 2Q = 20$, ხოლო სრული დანახარჯის ფუნქციაა $TC = Q^3 - 8Q^2 + 20Q + 2$.

ა) დავადგინოთ პროდუქციის რა რაოდენობისთვის იქნება მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური. მთლიანი ამონაგები მაქსიმალური. მთლიანი ამონაგები:

$$TR = pQ = (20 - 2Q)Q = 20Q - 2Q^2,$$

$$MR = (TR)' = -4Q + 20,\ R' = 0,\ \text{როცა}\ -4Q + 20 = 0,\ Q = 5,$$

$(TR)'' = -4 < 0$, ე. ი., როცა $Q = 5$ მთლიანი ამონაგები მაქსიმალურია.

ბ) ვიპოვოთ მოგების მაქსიმალური მნიშვნელობა და Q-ს ის მნიშვნელობა, სადაც ის მიიღწევა. მოგება

$$P = TR - TC = -2Q^2 + 20Q - Q^3 + 8Q^2 - 20Q - 2 = -Q^3 + 6Q^2 - 2,$$

$$MP = P' = -3Q^2 + 12Q.$$

ამოვხსნათ განტოლება:

$$-3Q^2 + 12Q = 0,\ -3Q(Q - 4) = 0,\ Q = 4. \qquad (\ Q=0 \quad \text{არ განვიხილავთ})$$

$(MP)' = (-6Q + 12)\big|_{Q=4} = -12 < 0$, $Q = 4$ არის მაქსიმუმის წერტილი.

$$P_{\max} = P(4) = -4^3 + 6 \cdot 16 - 2 = -64 + 96 - 2 = 30.$$

$$MC = (TC)' = 3Q^2 - 16Q + 20.$$

$$MC(4) = (3Q^2 - 16Q + 20)\big|_{Q=4} = 48 - 64 + 20 = 4.$$

$$MR(4) = (-4Q + 20)\big|_{Q=4} = 4.$$

ე. ი. $MC(4) = MR(4)$.

პასუხი.

ა) როცა $Q = 5$, მაშინ მთლიაი ამონაგები მაქსიმალურია.

ბ) მოგება P მაქსიმალურია, როცა $Q = 4$, $P_{\max} = P(4) = 30$.

10. მიწოდების ფუნქციაა $p = Q_S/2 + 25$, ხოლოც მოთხოვნის $p = -2Q_D + 50$. მთავრობამ გადაწყვიტა, შემოიღოს t გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე. დაადგინეთ t-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს იმ დაშვებით, რომ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, მიწოდების ფუნქციაა: $p = \frac{1}{2}Q_S + 25$, ხოლო მოთხოვნის $p = -2Q_P + 50$. მთავრობამ გადაწყვიტა შემოიღოს t გადასახადი პროდუქციის ერთეულზე; უნდა დავადგინოთ t-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სახელმწიფო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს, თუ ბაზარი იმყოფება წონასწორობაში.

t ლარი გადასახადი უნდა გავითვალისწინოთ მიწოდების ფუნქციაში, ამიტომ

$$p = \frac{1}{2}Q_S + 25 + t.$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლება

$$\frac{Q}{2} + 25 + t = -2Q + 50,$$

$$\frac{5}{2}Q = 25 - t,\quad Q = 10 - \frac{2}{5}t.$$

სახელმწიფო მიიღებს შემოსავალს: $S = tQ_t = t\left(10 - \frac{2}{5}t\right) = 10t - \frac{2}{5}t^2$.

დავადგინოთ S -ის მაქსიმუმი,

$S' = 10 - \frac{4}{5}t, \quad S' = 0$, როცა $4t = 50$, $t = 12.5$ ლარი.

$S'' = -\frac{4}{5} < 0$, ე. ი. $t = 12.5$ მაქსიმუმის წერტილია.

პასუხი. სახელმწიფო მაქსიმალურ შემოსავალს მიიღებს, როცა გადასახადი $t = 12.5$ ლარს.

12. ელექტრული მოწყობილობების მწარმოებელმა კომპანიამ ახალი პროდუქტი წარმოადგინა 1 იანვარს. აღნიშნულ პროდუქტზე მთელი წლის განმავლობაში შეკვეთების S რაოდენობა გამოსვლიდან t დღეს განისაზღვრება $S = t^2 - 0.002t^3$ ფორმულით. გაარკვიეთ:

ა) რა იქნება შეკვეთების მაქსიმალური რაოდენობა დღეში და რომელ დღეს იქნება იგი?

ბ) გამოსვლიდან მერამდენე დღეს იქნება შეკვეთების ყველაზე სწრაფი ზრდა?

ამოხსნა. პირობის თანახმად, შეკვეთების S რაოდენობა 1 იანვრიდან t დღის შემდეგ განისაზღვრება $S = t^2 - 0.002t^3$ ფორმულით.

ა) შეკვეთების მაქსიმალური რაოდენობის გასარკვევად ამოვხსნათ განტოლება:

$$S'(t) = 2t - 0.006t^2 = 0,$$

$$2t(1 - 0.003t) = 0,$$

$$t = 0, \quad t = \frac{1}{0.003} = \frac{1000}{3} = 333\frac{1}{3};$$

$$S''(t) = (2 - 0.012t)\Big|_{t=333\frac{1}{3}} = 2 - 4 = -2 < 0.$$

ე. ი. როცა $t = 333\frac{1}{3}$, $S(t)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი. მაგრამ, რადგან t უნდა იყოს მთელი დადებითი რიცხვი, ამიტომ შევადაროთ $S(333)$ და $S(334)$.

$$S(333) = 333^2(1 - 0.002 \cdot 333) \approx 37036.96,$$

$$S(334) = 334^2(1 - 0.002 \cdot 334) \approx 37036.59,$$

$$S(334) < S(333).$$

ამრიგად, მაქსიმალური შეკვეთები იქნება 333-ე დღეს და ის შეადგენს 37037-ს.

ბ) პროდუქციის გამოსვლიდან მერამდენე დღეს იქნება შეკვეთების ყველაზე სწრაფი ზრდა?

საკითხის გასარკვევად უნდა დავადგინოთ $S'(t)$ ფუნქციის მაქსიმუმი.

ამოვხსნათ განტოლება

$$S''(t) = 2 - 0.012t = 0,$$

$$t = \frac{2000}{12} = \frac{500}{3} = 166\frac{2}{3},$$

$S'''(t) = -0.012 < 0$, ე. ი. $t = 166\frac{2}{3}$ არის მაქსიმუმის წერტილი.

შევარჩიოთ t -ს მთელი მნიშვნელობა,

$$S'(166) = 2t(1 - 0.003t)_{t=166} \approx 166.664,$$

$$S'(167) = 2 \cdot 167 (1 - 0.003 \cdot 167) \approx 166.666 .$$

ამრიგად, $S'(166) < S'(167)$, ე. ი. როცა $t = 167$, მაშინ იქნება შეკვეთების ყველაზე სწრაფი ზრდა.

პასუხი.

ა) შეკვეთების მაქსიმალური რაოდენობა იქნება 333-ე დღეს და შეკვეთები შეადგენს 37037-ს.

ბ) პროდუქციის გამოსვლიდან 167-ე დღეს იქნება შეკვეთების ყველაზე სწრაფი ზრდა.

14. მოთხოვნისა და მთლიანი დანახარჯის ფუნქციებია, შესაბამისად, $4p + Q - 16 = 0$ და $TC = 4 + 2Q - \frac{3Q^2}{10} + \frac{Q^3}{20}$.

ა) ჩაწერეთ TR, P, MR და MC ფუნქციები Q-ს ტერმინებში;

ბ) იპოვეთ მოგების P ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი;

გ) შეამოწმეთ, რომ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილში $MR = MC$.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, $4p + Q - 16 = 0$ არის მოთხოვნის ფუნქცია, ხოლო $TC = 4 + 2Q - \frac{3Q^2}{10} + \frac{Q^3}{20}$ მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა.

ა) ჩავწეროთ სრული ამონაგები:

$$TR = pQ = \left(-\frac{1}{4}Q + 4\right)Q = -\frac{1}{4}Q^2 + 4Q .$$

მოგების ფუნქცია

$$P = TR - TC = -\frac{1}{4}Q^2 + 4Q - 4 - 2Q + \frac{3Q^2}{10} - \frac{Q^3}{20} = -\frac{Q^3}{20} + \frac{1}{20}Q^2 + 2Q - 4 ,$$

$$P = -\frac{Q^3}{20} + \frac{1}{20}Q^2 + 2Q - 4 .$$

ვიპოვოთ P მოგების მაქსიმუმი. ამოვხსნათ განტოლება:

$P' = -\frac{3}{20}Q^2 + \frac{1}{10}Q + 2 = 0$, $3Q^2 - 2Q - 40 = 0$, $Q_{1,2} = \frac{1 \pm 11}{3}$, $Q_1 = -\frac{10}{3}$, $Q_2 = 4$. (Q დადებითია).

$$P'' = \left(-\frac{3}{10}Q + \frac{1}{10}\right)\Bigg|_{Q=4} = -1.2 + 0.1 = -1.1 < 0 .$$

ე. ი. $Q = 4$ არის მაქსიმუმის წერტილი.

ბ) შევამოწმოთ, რომ $MR = MC$, როცა $Q = 4$,

$$MR = (TR)' = \left(-\frac{1}{4}Q^2 + 4Q\right)' = -\frac{1}{2}Q + 4 ,$$

$$MC = (TC)' = \left(4 + 2Q - \frac{3}{10}Q^2 + \frac{Q^3}{20}\right)' = 2 - \frac{3}{5}Q + \frac{3}{20}Q^2 ,$$

$$MR(4) = 2 , \ MC(2) = 2 - \frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{3}{20} \cdot 16 = 2 .$$

პასუხი.

ა) $TR = -\frac{1}{4}Q^2 + 4Q$, $P = -\frac{1}{20}Q^3 + \frac{1}{20}Q^2 + 2Q - 4$, $MR = -\frac{1}{2}Q + 4$, $MC = 2 - \frac{3}{5}Q + \frac{3}{20}Q^2$.

ბ) მოგება მაქსიმალურია, როცა $Q = 4$.

გ) $MR = MC = 2$, როცა $Q = 4$.

16. გამოთვალეთ მოცემული მოთხოვნის $D(p)$ ფუნქციების ელასტიკურობა და განსაზღვრეთ, არის თუ არა მოთხოვნა ელასტიკური, არაელასტიკური ან ერთეულოვანი მითითებულ p ფასზე.

ა) $D(p) = -1.3p + 10, \quad p = 4;$

ბ) $D(p) = -1.5p + 25, \quad p = 12;$

გ) $D(p) = 200 - p^2, \quad p = 10;$

დ) $D(p) = \sqrt{400 - 0.01p^2}, \quad p = 120;$

ამოხსნა. ა) მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია: $D(p) = -1.3P + 10$. ვიპოვოთ მოთხოვნის ელასტიკურობა p-ს მიმართ.

$D(p)$ ფუნქციის ელასტიკურობა $ED(P)$ გამოითვლება ფორმულით:

$$ED(p) = \frac{p}{D(p)} D'(p) = \frac{p}{-1.3p + 10}(-1.3) = \frac{-1.3p}{-1.3p + 10};$$

როცა $p = 4$, მაშინ $E(p) = \frac{-5.2}{4.8} = \frac{-13}{12}$.

$|E(p)| > 1$, მოთხოვნა ელასტიკურია ფასის მიმართ.

დ) მოცემულია $D(p) = \sqrt{400 - 0.01p^2}$;

$$ED(p) = \frac{p}{D(p)} D'(p) = \frac{p}{\sqrt{400 - 0.01p^2}} \cdot \frac{(-0.02p)}{2\sqrt{400 - 0.01p^2}} = \frac{-0.01p^2}{400 - 0.01p^2};$$

$$E(120) = \frac{-0.01 \cdot 14400}{400 - 144} = -\frac{144}{256} = -\frac{9}{16}.$$

$|E(120)| < 1$, მოთხოვნა არაელასტიკურია, როცა $p = 120$.

პასუხი.

ა) მოთხოვნა ელასტიკურია ფასის მიმართ, თუ $p = 4$.

დ) მოთხოვნა არაელასტიკურია ფასის მიმართ, თუ $p = 120$.

18. როცა პროდუქტის ფასი p ლარია, მომხმარებლის მოთხოვნა მასზე შეადგენს q ერთეულს, სადაც p და q ერთმანეთთან დაკავშირებულია განტოლებით $q^2 + 3pq = 22$.

ამოხსნა. უნდა ვიპოვოთ q (მოთხოვნის) ელასტიკურობა p ფასის მიმართ, თუ p და q დაკავშირებულია ტოლობით

$$q^2 + 3pq = 22.$$

გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა p-ს მიმართ და ვიგულისხმოთ, რომ q არის p-ს ფუნქცია, გვექნება

$$2qq' + 3q + 3pq' = 0,$$

$$q'(2q + 3p) = -3q,$$

$$q' = \frac{-3q}{2q + 3p}.$$

ელასტიკურობა

$$Eq(p)=\frac{p}{q}\cdot q'=\frac{p}{q}\cdot\frac{(-3q)}{2q+3p}=\frac{-3p}{2q+3p}.$$

როცა $p=3$, მაშინ მოცემული განტოლებიდან ვღებულობთ

$$q^2+9q-22=0,$$

$$q_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+88}}{2}=\frac{-9\pm 13}{2},$$

$$q_1=2,\ q_2=-11.$$

მაშასადამე, როცა $p=3$, მაშინ $q=2$ და მივიღებთ

$$E(3)=\frac{-3\cdot 3}{4+9}=-\frac{9}{13},\quad |E(3)|<1,$$

ე. ი. მოთხოვნა არაელასტიკურია ფასის მიმართ, როცა $p=3$.

პასუხი.

ა) $E(q)=\dfrac{-3p}{2q+3p}$.

ბ) მოთხოვნა არაელასტიკურია, როცა $p=3$.